有価証券の最適資金化方策

Optimal Liquidation Policy for Security Holdings

中 村 正 治　荒 深 美和子　中 川 覃 夫
Syouji NAKAMURA　Miwako ARAFUKA　Toshio NAKAGAWA
金城学院大学生活環境学部　愛知工業大学経営情報科学部

1．はじめに

保有する証券を短期間に市場で売却可能である場合，その証券売却が市場価格に与える影響（マーケット・インパクト）を考慮して，保有証券の資金化額を最大にする最適資金化方策を導出する．

保有証券を証券市場で売却する場合の市場価格への影響は，市場に追加的な売却を行えば価格は，市場の原理から価格は低下すると仮定する．しかしながら，証券の追加的な売却の影響はある程度の期間が経過すればなくなると考えられる［図１］．すなわち，本モデルにおいては，市場価格が売却前の価格に復帰すると仮定する．

2．モデル

保有証券を証券市場で売却する場合，市場価格に与えるマーケット・インパクト（自己インパクト）を考慮した最適執行方策を解析的に導出する．証券市場は以下のように構成されていると仮定する．

(i) 保有証券の売却ロットを小さくすれば，マーケット・インパクトによる証券の市場価格低下を小さくすることができる[1]．

(ii) (i)以外によって証券市場の証券価格は変動しない．

(iii) 証券売却後，ある一定時間間隔を置けば，証券価格は売却前の価格になる．

(iv) 証券売却には証券のロットに無関係な取引コストと証券ロットに関係した取引コストが必要である[表１]．

表１　株式の売買手数料計算例（税込み）

約定代金	手数料
100万円	12,495円
200万円	21,420円
500万円	47,145円
1,000万円	82,845円
2,000万円	140,595円
3,000万円	198,345円

出典）
http://www.nomura.co.jp/retail/commission.html

一般的に，「マーケット・インパクトは多様な要因により決定されるため，これを定式化するのは容易ではない．このため，定式化の方法に一定のコンセンサスが得られている訳ではなく，学界・実務界でもさまざまなアプローチが試みられている」[2]．

ここでは，売却ロットを小さくすれば，価

格低下を押さえることができるが，売却回数が増加すれば取引コストが逓増する．逆に，売却ロットを大きくすれば，市場価格低下の幅が大きくなる，しかしながら取引コストは減少する．以上のような売却ロットの大きさによる価格に与える影響と手数料の間にはトレード・オフの関係がある．これらの状況において保有有価証券の売却の最適執行方策を導出する．

ここで，以下の記号を導入する．

S_0: 時点0の証券の名目価値.
$E(n)$: 時点 n の証券の実質価値.
c_0: 1回あたり取引の固定費用.
λ: マーケット・インパクト関数パラメータ
μ: 価格復元関数パラメータ

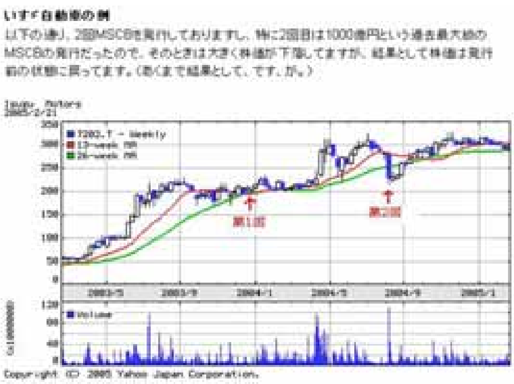

図1：大量株発行の市場へのインパクト

出典
http://www.tez.com/blog/archives/000364.html

3．モデル1

時刻0における保有証券 S_0 を時刻 T までに資金化しなければならないとする．保有証券を1回で全て売却しても良いし，n 等分して S_0/n を毎日売却してもよい．市場価格は，売却量に応じたインパクト関数によって価格が低下するが，一定の間隔を置けば売却前の価格に復元すると仮定する．モデル1では，売却後，時点 T までの受取利息が発生しない場合を想定している．1回の売却額 S_0/n の資金化額は $\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})$ とし，1回の手数料を c_0 とおくと，手数料を差し引いた資金化額は，

$$\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0, \tag{1}$$

n 回に等分割して売却した場合の総資金化額は，

$$\begin{aligned} E_1(n) &= n\left\{\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0\right\} \\ &= S_0(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-nc_0. \end{aligned} \tag{2}$$

よって，保有有価証券単位当たりの資金化額は，

$$Z_1(n) = \frac{E_1(n)}{S_0} = 1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}}-\frac{n}{S_0}c_0 \tag{3}$$

となる．

3．モデル1の最適方策

資金化額 $Z_1(n)$ を最大にする n^* を求める．

$$Z_1(1) = 1-e^{-\lambda S_0}-c_0,\quad Z_1(\infty) = -\infty \tag{4}$$

である．$Z_1(n+1)-Z_1(n) \leq 0$ とおくと，

$$e^{-\lambda\frac{n}{S_0}}(1-e^{-\lambda/S_0}) = \frac{c_0}{S_0} \tag{5}$$

左辺を $L(n)$ とおくと，$L(n)$ は $L(1)$ から，0の単調減少関数で，

(*i*) $e^{-\lambda/S_0}(1-e^{-\lambda/S_0}) \leq \frac{c_0}{S}$ ならば，$n^*=1$,
すなわち，1回で保有証券を売却する．

(*ii*) $e^{-\lambda/S_0}(1-e^{-\lambda/S_0}) > \frac{c_0}{S}$ ならば，式(5)を満たす最小の $n^*(2 \leq n^* < \infty)$ が存在する．

4．モデル2

証券市場に売り注文が累積してくると，需給関係から市場における証券価格が低下すると仮定する．さらに，モデル1と同様に，市場の証券価格は，インパクト関数により，売

却量に応じて低下する．時間を考慮して，$t_0 = 0, T, 2T, \ldots, (n-1)T$ で保有証券を n 等分した $\frac{S_0}{n}$ を T 時間ごとに市場で売却する．$(1-e^{-\lambda n/S_0})$ は売却量に応じたマーケット・インパクト関数である．これは，自己インパクト関数とも呼ばれる．$e^{-\alpha jT}$ は証券市場に売り注文が累積してくると需給関係から生じるインパクト関数である．時刻 jT における資金化額 Z_2 を

$$\left\{\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0\right\}e^{-\alpha jT} \quad (j=0,\ldots,n-1) \tag{6}$$

とおく．n 回に等分割して売却した場合の総資金化額は，

$$\begin{aligned} E_2(n) &= \left\{\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0\right\} \\ &\quad \times\left(1+e^{-\alpha T}+\cdots+e^{-\alpha(n-1)T}\right) \\ &= \left\{\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0\right\}\frac{1-e^{-\alpha nT}}{1-e^{-\alpha T}} \end{aligned} \tag{7}$$

式(7)において，$\alpha \to 0$ とすると，式(2)に一致する．よって，保有有価証券単位当たりの資金化額は，

$$\begin{aligned} Z_2(n) &= \frac{E_2(n)}{S_0} \\ &= \left\{\frac{1}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-\frac{c_0}{S_0}\right\}\frac{1-e^{-\alpha nT}}{1-e^{-\alpha T}} \end{aligned} \tag{8}$$

を最大にする n^* を求める．

4．モデル 2 の最適方策

資金化額 $Z_2(n)$ が最大となる n^* を求める．

$$Z_2(1) = 1-e^{-\lambda/S_0}-\frac{c_0}{S_0}$$

$$Z_2(\infty) = -\frac{c_0}{S_0(1-e^{-\alpha T})} \tag{9}$$

である．現実の取引では，$Z_2(1) > 0$（負ならば売却しない）である．また，$Z_2(\infty) < 0$ から，$Z_2(n) > 0$ となる有限な n^* が存在する．最大となる n^* は数値計算により求めることができる．

5．モデル 3

証券市場の機能がモデル 1，モデル 2 の仮定に加えて，証券売却によるマーケット・インパクトによる価格低下から価格上昇に向けての復元過程を関数で与える．すなわち，モデル 3 では，j 時点の証券売却による証券価格低下した価格から，証券価格上昇に向けての復元関数を考慮している．

時刻 T_0 での資金化額は，

$$\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})-c_0 \tag{10}$$

時刻 T_1 での資金化額は，

$$\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})e^{\mu T_1} = Q_1$$

とおき，

$$\left\{Q_1(1-e^{-\lambda/Q_1})-c_0\right\}e^{-\alpha T_1} \tag{11}$$

時刻 T_2 での資金化額は，

$$\frac{S_0}{n}(1-e^{-\lambda\frac{n}{S_0}})e^{\mu(T_2-T_1)} = Q_2$$

とおくと，

$$\left\{Q_2(1-e^{-\lambda/Q_2})-c_0\right\}e^{-\alpha T_2} \tag{12}$$

となり，以上より n 回に等分割して売却した場合の総資金化額は

$$E_3(n) = \sum_{j=0}^{n-1}\left\{Q_j(1-e^{-\lambda/Q_j})-c_0\right\}e^{-\alpha T_j} \tag{13}$$

$$Q_{j+1} = Q_j(1-e^{-\lambda/Q_j})e^{\mu(T_{j+1}-T_j)} \quad (j=0,\ldots,n-2)$$

$$Q_0 \equiv \frac{S_0}{n} \tag{14}$$

よって，式(14)から順次 Q_j を求め，式(13)に代入することによって，$E_3(n)$ を求める．さらに，

$$Z_3(n) = \frac{E_3(n)}{S_0} \tag{15}$$

を最大にする n^* を求める．

5.1．モデル3の最適方策

$n \to \infty$ とすると，$Q_n = 0$，から，

$$Z_3(1) = 1 - e^{-\lambda/S_0} - \frac{c_0}{S_0}$$

$$Z_3(\infty) < 0 \tag{16}$$

現実の取引では，$Z_3(1) > 0$（負ならば売却しない）である．よって，$Z_3(n)$ を最大にする有限な n^* が存在する．

6．数値計算

表2における関数のパラメータでは，保有有価証券を34回に等分割で売却したとき総資金化額は92,647,601円であり，33回に均等売却したほうが総資金化額92,943,840円と高くなっている．さらに，35，36回に分割回数を増加すると，総資金化額は93,289,357円，93,949,124円と増加している．取引手数料の計算は，手数料と約定金額を回帰した式，

$$c_0 = (S_0/n) \times 0.002625 + 119595.0$$

を使用している．また，モデル3において，$Tj = jT$，$Q_{j+1} = Q_j = \frac{S_0}{n}$ と置くと，モデル2の式(7)とモデル3の式(13)は等しくなる．

表2：モデル3における総資金化額

$S_0 = 100{,}000{,}000$, $\lambda = 150{,}000{,}000$, $\alpha = 0.01$

n^*	μ	$E_3(n^*)$ (円)
33	0.0002	92,943,840
34	0.0004	92,647,601
35	0.0006	93,289,357
36	0.0008	93,949,124
38	0.0010	94,638,556
39	0.0012	95,367,121

7．まとめ

ここでは，マーケット・インパクトの定式化を試みている．マーケット・インパクトのメカニズムは複雑で定式化が容易ではないし[2]，また，決定的な理論も現在のところない．しかしながら，証券価格を理論的に分析し，価格変動の説明力を高めることによって，実際の執行方策とすることができると考える．2005年1月7日に発表されたJR東日本の政府保有株を全額売却する政府の方策は，市場の状況を見て売却すると発表していることから，このような大量の証券が市場に売却される場合はマーケット・インパクトが存在すると考えられる．また，取り扱い量の少ない銘柄における証券売却によるマーケット・インパクトが存在すると考えられる．しかしながら両者のマーケット・インパクトは異なってくることが考えられる．このようにマーケット・インパクトはいろいろな要因で複雑に変化すると考えられるが，ここでは，後者を想定したモデルである．今後の課題として，実市場とモデルの比較検討が必要である．

参考文献

[1] Maueen O'hara，（大村敬一，他共訳）：マーケット・マイクロストラクチャー，金融財政事情，1996年

[2] 久田祥史，山井康浩，流動性リスク評価方法の実用化に向けた研究，金融研究2000.9，2000年

[3] 小田信之，久田祥史，山井康浩，流動性リスク評価方法について：理論サーベイと実用化へ向けた課題，金融研究2000.3，2000年

[4] R.Jarrow and S.Turnbul, *Derivative Securities*. Thomson Learning Company, 1973.